

MESTRADO EM
MÉTODOS QUANTITATIVOS PARA A DECISÃO
ECONÓMICA E EMPRESARIAL

TRABALHO FINAL DE MESTRADO
RELATÓRIO DE ESTÁGIO

**REBALANCEAMENTO ESTÁTICO DO SISTEMA DE
BICICLETAS PÚBLICAS PARTILHADAS DE LISBOA -
GIRA**

SIMÃO PEDRO SOUSA MELO

OUTUBRO 2018

MESTRADO EM
MÉTODOS QUANTITATIVOS PARA A DECISÃO
ECONÓMICA E EMPRESARIAL

TRABALHO FINAL DE MESTRADO
RELATÓRIO DE ESTÁGIO

REBALANCEAMENTO ESTÁTICO DO SISTEMA DE
BICICLETAS PÚBLICAS PARTILHADAS DE LISBOA -
GIRA

SIMÃO PEDRO SOUSA MELO

ORIENTAÇÃO:

PROFESSORA DOUTORA LEONOR ALMEIDA LEITE SANTIAGO
PINTO
ENGENHEIRO JOÃO NUNO AZEVEDO DE ALMEIDA RIBEIRO

OUTUBRO 2018

Agradecimentos

Várias foram as pessoas e instituições que contribuíram direta ou indiretamente no desenvolvimento deste trabalho final de mestrado, aqui ficam os meus sinceros agradecimentos:

À *Professora Maria Cândida Mourão*, pela proposta deste estágio e por ter encontrado sempre a melhor solução para os imprevistos do percurso.

À *Professora Leonor Santiago Pinto*, por toda a disponibilidade, incentivo e conhecimentos transmitidos. Não poderia ter tido melhor orientação.

À *EMEL*, em particular ao *Engenheiro João Ribeiro e Engenheiro Frederico Henriques*, pela disponibilidade e partilha de conhecimentos.

Ao *ISEG* e à *Fundação para a Ciência e a Tecnologia* pela bolsa de investigação no âmbito do projeto RORNET - PTDC/MATNAN/2196/2014.

Aos *meus pais*, aos *meus irmãos* e à *Inês* pela oportunidade, exemplo, ajuda e motivação.

Resumo

No seguimento de um protocolo celebrado entre o Instituto Superior de Economia e Gestão da Universidade de Lisboa (ISEG-ULisboa) e a EMEL - Empresa Municipal de Mobilidade e Estacionamento de Lisboa, E.M. S.A., foi realizado um estágio nesta empresa para a elaboração do trabalho final de mestrado em Métodos Quantitativos para a Decisão Económica e Empresarial.

A EMEL é a entidade pública responsável pela implementação, gestão e operação do Sistema de Bicicletas Públicas Partilhadas de Lisboa. Os Sistemas de Bicicletas Partilhadas (SBP) oferecem um meio de transporte alternativo através da disponibilização de bicicletas públicas distribuídas por estações que estão espalhadas pela área urbana de ação. Este tipo de sistemas oferece uma opção de mobilidade ecológica e sustentável, contribuindo para a redução da poluição e tráfego automóvel.

A assimetria nos padrões de utilização dos SBP leva por vezes à existência de estações sem qualquer bicicleta e, de forma oposta, estações completamente lotadas, impedindo os utilizadores de recolher ou devolver bicicletas, respetivamente. Com efeito, de forma a possibilitar o equilíbrio do sistema é necessária uma operação de rebalanceamento de bicicletas entre as estações.

Neste trabalho propõe-se estudar o problema de rebalanceamento estático para o SBP de Lisboa com o objetivo de gerar rotas para a operação de rebalanceamento, de forma a minimizar o custo total da mesma. Serão apresentados e analisados dados dos fluxos de viagens relativos a um determinado conjunto de estações do sistema. O problema é formulado numa rede composta por vértices representativos do depósito e das estações que têm uma procura associada, e arcos que representam as ligações entre os vértices, com um custo associado.

São expostos e testados três métodos de obtenção de soluções para o problema, um por meio de uma formulação matemática e dois através de heurísticas. Os resultados de testes computacionais com instâncias geradas para o efeito são ainda apresentados e comentados.

Palavras-Chave: Sistema de Bicicletas Partilhadas, Rebalanceamento, Rotas, Formulação Matemática, Heurística.

Abstract

Following a protocol signed between ISEG-ULisboa (Instituto Superior de Economia e Gestão da Universidade de Lisboa) and EMEL - Empresa Municipal de Mobilidade e Estacionamento de Lisboa, E.M. S.A., an internship in this company was carried out to prepare the final thesis of master's in Quantitative Methods for Decision-Making in Economic and Business.

EMEL is the public entity in charge of the implementation, management and operation of the Public Bike Sharing System (PBSS) in Lisbon. Bike Sharing Systems (BSS) provide an alternative mean of transportation by providing public bicycles distributed through stations that are scattered throughout the urban area of action of the system. This type of systems offers a choice of ecological and sustainable mobility, contributing to the reduction of pollution and car traffic.

The asymmetry in the patterns of use of BSS on some occasions leads the system to have stations without any bicycles and, conversely, fully crowded stations, not allowing users to collect or return bicycles, respectively. To maintain the system balanced a rebalancing operation of bicycles between the stations is necessary.

This work studies the static bike-sharing rebalancing problem for the Lisbon BSS, with the purpose of producing routes for the rebalancing operation to ensure the minimization of the operation's total cost. Data of travel flows relative to a given set of stations in the system is presented and analyzed. The problem is formulated in a network composed of representative vertices of the depot and the stations that have an associated demand, and arcs representing the connections between the vertices with an associated cost.

Three methods to obtain solutions to the problem are introduced and tested, one by means of a mathematical formulation and two others by means of heuristic. The results of computational experiments on generated instances are presented and discussed.

Keywords: Bike-sharing, Bike-sharing Rebalancing Problem, Routes, Mathematical Formulation, Heuristic.

Índice

AGRADECIMENTOS	1
RESUMO	2
ABSTRACT	3
ÍNDICE DE FIGURAS	5
ÍNDICE DE TABELAS	5
GLOSSÁRIO	6
1. INTRODUÇÃO	7
1.1. Apresentação	7
1.2. Estrutura do relatório	7
1.3. EMEL – Empresa Municipal de Mobilidade e Estacionamento de Lisboa	8
1.4. Sistema de Bicicletas Públicas Partilhadas – GIRA	8
1.5. Enquadramento do Problema	10
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	11
3. DESENVOLVIMENTO DA METODOLOGIA	17
3.1. Análise dos dados	17
3.2. Formulação Matemática do Problema	22
3.3. Heurísticas	25
3.3.1 Heurística 1	26
3.3.2 Heurística 2	28
4. APRESENTAÇÃO DE RESULTADOS	30
4.1. Instâncias de teste	30
4.2. Resultados dos testes	30
4.3. Análise de Resultados	32
5. CONCLUSÕES	34
REFERÊNCIAS	37
ANEXOS	39
Anexo 1 – Dados do problema e área de atuação	39

Anexo 2 – Instâncias	41
Anexo 3 – Resultados	42

Índice de Figuras

Figura 1 - Fluxos de viagens para a estação 1 – Gare do Oriente (março/abril 2018)	18
Figura 2 - Fluxos de viagens para estações dos três grupos identificados (março/abril 2018)	20
Figura 3 - Distribuição da diferença do número de bicicletas por dia para a estação 1	21
Figura 4 - Pseudocódigo da heurística 1	27
Figura 5 - Pseudocódigo da heurística 2	29
Figura 6 - Mapa da rede GIRA (dezembro de 2018), zona de atuação do trabalho	40
Figura 7 - Mapa zona de atuação, depósito e estações	40
Figura 8 - Solução gerada pela formulação	43
Figura 9 - Solução gerada pela heurística 1	43
Figura 10 - Solução gerada pela heurística 2	44

Índice de Tabelas

Tabela I - Notação pseudocódigo	25
Tabela II - Resultados	31
Tabela III – Desvios dos resultados por grupo	32
Tabela IV - Identificação da estação, Nome e Localização	39
Tabela V - Matriz de distâncias em quilómetros	39
Tabela VI - Instâncias geradas	41
Tabela VII - Desvios dos resultados	42

Glossário

1-PDTSP – *One-commodity Pickup and Delivery Traveling Salesman Problem*

BRP – *Bike Sharing Rebalancing Problem*

BSS – *Bike Sharing System*

CVRP – *Capacitated Vehicle Routing Problem*

EMEL – Empresa Municipal de Mobilidade e Estacionamento de Lisboa, E.M. S.A.

ISEG – Instituto Superior de Economia e Gestão

M-M – *Many-to-Many*

MTZ – *Miller-Tucker-Zemlin*

PDVRP – *Pickup and Delivery Vehicle Routing Problem*

PBSS – *Public Bike Sharing System*

SBP – Sistemas de Bicicletas Partilhadas

SBPP – Sistema de Bicicletas Públicas Partilhadas

SVOCPP – *Single Vehicle One-commodity Capacitated Pickup and Delivery Problem*

TSP – *Traveling Salesman Problem*

ULisboa – Universidade de Lisboa

VBA – *Visual Basic for Applications*

VRP – *Vehicle Routing Problem*

1. Introdução

1.1. Apresentação

O presente relatório de estágio surge no seguimento de um protocolo celebrado entre o Instituto Superior de Economia e Gestão da Universidade de Lisboa, doravante designado por ISEG, e a Empresa Municipal de Mobilidade e Estacionamento de Lisboa, E.M. S.A., doravante designada por EMEL.

O protocolo tem como intenção a otimização dos recursos humanos e económicos da empresa, no cumprimento do seu objeto social, e mais concretamente para este trabalho, a gestão e operação de soluções de mobilidade urbana. Neste contexto, foi proposto pela EMEL um estudo sobre a otimização da operação de rebalanceamento do sistema de bicicletas partilhadas de Lisboa.

Esta proposta foi aceite, considerando o impacto e relevância dos sistemas de transporte sustentáveis na sociedade atual, assim como o facto de ser um tema de interesse dentro do programa de estudos do Mestrado em Métodos Quantitativos para a Decisão Económica e Empresarial.

Concluindo, o objeto deste trabalho final de mestrado é o rebalanceamento estático do sistema de bicicletas partilhadas da cidade de Lisboa.

1.2. Estrutura do relatório

O presente relatório de estágio está dividido em seis capítulos. No capítulo 1 é feito um enquadramento do problema, introduzindo a empresa onde o estágio foi realizado e é feita uma exposição do contexto do sistema de bicicletas partilhadas de Lisboa. O capítulo 2 consiste da revisão bibliográfica, onde são feitas referências a autores e obras que tratam assuntos relevantes para a elaboração do presente trabalho. O capítulo 3 é composto pela metodologia aplicada, onde são apresentadas uma formalização do problema em programação linear inteira e duas heurísticas. No capítulo 4 são apresentados e analisados os resultados obtidos. O capítulo 5 contém as conclusões do

trabalho, são ainda mencionadas as limitações encontradas assim como potenciais pontos de desenvolvimento futuro.

1.3. EMEL – Empresa Municipal de Mobilidade e Estacionamento de Lisboa

“A EMEL – Empresa Municipal de Mobilidade e Estacionamento de Lisboa, E.M. S.A., é uma pessoa coletiva de direito privado, com natureza empresarial sob a forma de entidade empresarial local, dotada de autonomia administrativa, financeira e patrimonial, sob tutela e superintendência da Câmara Municipal de Lisboa.” [1]

A EMEL tem mais de duas décadas de existência e foi criada com o objetivo de ordenar o estacionamento motorizado em Lisboa. A cidade de Lisboa dos anos 90 não encontra paradigma semelhante na Lisboa dos dias de hoje, porém a empresa conseguiu evoluir e acompanhar as necessidades de uma capital europeia em grande crescimento, alargando o seu âmbito de ação com o intuito de obter uma melhoria constante e sustentável da qualidade de vida dos seus habitantes e visitantes, uma vez que o turismo tem também um grande relevo neste crescimento.

O seu objeto social, que foi sendo atualizado ao longo dos anos, contempla, nos dias que correm; “a prestação de serviços de interesse geral no âmbito do desenvolvimento, gestão e exploração de soluções de mobilidade urbana, as quais incluem a construção, promoção, gestão e fiscalização do estacionamento público urbano e serviços associados, a construção e operação de infraestruturas de apoio à mobilidade pedonal, sistemas de mobilidade elétrica e produtos de mobilidade partilhada.” [2]

1.4. Sistema de Bicicletas Públicas Partilhadas – GIRA

No mundo existem atualmente mais de 1600 Sistemas de Bicicletas Partilhadas (SBP) em atividade [3]. Ao longo do tempo estes sistemas foram-se desenvolvendo e a sua implementação foi feita através de distintos modelos de acordo com as diferentes necessidades de cada local ou cidade, porém, o conceito de “*Bike Sharing*” permanece de fácil compreensão: existe uma disponibilização de bicicletas na via pública que permite

ao utilizador recolher uma bicicleta em determinado local e devolvê-la noutro lugar, assegurando, assim, um transporte eficiente e sustentável dentro da área de cobertura do sistema.

Traçando uma linha desde a primeira tentativa falhada de criar um sistema de bicicletas partilhadas, em 1965 na cidade de Amesterdão, até aos dias de hoje, podemos constatar que muito mudou. Por um lado, a tecnologia evoluiu de forma galopante, por outro, a população mundial cresceu para mais do dobro sendo que a percentagem de população urbana passou de 35% para 55% [4]. Os SBP têm vindo a ganhar importância na última década, com vista a dar resposta ao aumento da densidade populacional das grandes cidades, permitindo reduzir o tráfego automóvel, melhorar a qualidade do ar e a saúde pública. Estes sistemas têm duas grandes vantagens quando comparados com outros projetos de transporte: custo e tempo de implementação comparativamente baixos [5].

A EMEL, no cumprimento da sua missão de gestão e operação de soluções de mobilidade urbana, e com base nos princípios do desenvolvimento sustentável [6], envolveu-se na dinamização da mobilidade partilhada através da operação GIRA. Este projeto teve início em junho de 2017, através de uma fase piloto geograficamente limitada ao Parque das Nações, com um total de 90 bicicletas e 10 estações, sendo cada estação constituída por um número variável de docas onde são estacionadas as bicicletas. Em setembro do mesmo ano, entrou em ação a fase GIRA que veio expandir a rede de forma gradual a outras zonas da cidade. No fim do ano contava com 43 estações e 409 bicicletas em operação [1]. As previsões da EMEL para a rede GIRA inicial, quando totalmente implementada, contemplam 140 estações e 1410 bicicletas, sendo que os dados relativos aos primeiros dois meses de 2018 revelam uma grande adesão do público, com mais de 120 000 viagens por mês.

Podemos concluir, através dos dados apresentados, a importância e influência que este projeto está a ter na dinâmica da cidade e dos seus habitantes, estando a crescer de dia para dia. Assim, torna-se vital, num projeto desta magnitude e ainda numa tendência atual de franco crescimento, a utilização ótima dos recursos disponíveis, permitindo em simultâneo o melhor funcionamento possível do sistema.

1.5. Enquadramento do Problema

Como consequência do crescimento acentuado do número de utilizadores pendulares da rede GIRA, a empresa tem a responsabilidade social de fornecer o melhor serviço possível aos utilizadores que escolhem esta opção como meio de transporte.

Uma das principais áreas problemáticas a melhorar na rede prende-se com os períodos de falhas de serviço, nos quais as estações estão totalmente completas, ou, pelo contrário, sem qualquer bicicleta, forçando os utilizadores a realizarem deslocações a outras estações para que lhes seja possível devolver ou recolher as bicicletas, respetivamente. Uma possível solução para este problema é fazer um rebalanceamento do número de bicicletas por estação, que consiste no transporte, em veículos próprios para o efeito, de bicicletas de estações lotadas para estações com necessidade das mesmas.

Este serviço de rebalanceamento é atualmente efetuado por uma empresa subcontratada pela EMEL, o que torna necessário a existência de uma forte interligação e trabalho conjunto das duas empresas, com partilha de informação e conhecimento, uma vez que somente das sinergias criadas se poderá obter o melhor resultado final para ambas, e, mais importante ainda, para o consumidor final.

A operação de rebalanceamento conta com recursos limitados, tanto no número de veículos especializados, como no número de operadores. A estas limitações adiciona-se ainda o facto de as decisões sobre as rotas de rebalanceamento serem tomadas com base nas necessidades atuais, de forma reativa e não proativa, recorrendo a fatores qualitativos, como a experiência e conhecimento dos operadores.

Com efeito, para ser possível maximizar a utilização dos recursos existentes o processo deve ser sistematizado, permitindo algum cariz de planeamento e agendamento, e otimizado, sendo esse o objetivo deste trabalho. Mais concretamente o problema que se pretende resolver é o de determinação de rotas dos veículos especializados, de comprimento total mínimo, de forma a posicionar o número de bicicletas pretendido (e conhecido) em cada uma das estações. Para tal, propõe-se um modelo e heurísticas.

2. Revisão Bibliográfica

Os sistemas partilhados de mobilidade são uma das soluções mais promissoras para o problema do congestionamento exacerbado que se verifica nas grandes áreas urbanas. Em particular, sistemas de bicicletas partilhadas têm provado ser uma solução efetiva para o problema da “*last mile*”.

DeMaio [7] descreve a evolução dos sistemas de bicicletas partilhadas desde a década de 1960, quando foi introduzido o primeiro SBP em Amesterdão. Este sistema era conhecido como “*White Bikes*” em alusão às bicicletas pintadas de branco disponíveis para utilização. Esta primeira geração de bicicletas não teve o sucesso desejado e acabou por sucumbir ao fim de alguns dias. A segunda geração de bicicletas partilhadas nasceu na Dinamarca, onde, na primeira metade dos anos 90, foram instalados os primeiros sistemas com relativo sucesso, consequência da implementação de estações e mecanismos de pagamento. A terceira geração de SBP foi introduzida em 1996 na Universidade de Portsmouth em Inglaterra, permitindo aos estudantes alugar bicicletas utilizando cartões magnéticos.

Rapidamente se percebeu que a implementação de tecnologias de informação era vital para a melhoria da qualidade do serviço. Os sistemas foram aos poucos evoluindo com a implementação de tecnologia permitindo, entre outros, o rastreamento das bicicletas e o armazenamento de informação sobre as viagens e sobre os seus utilizadores, diminuindo consequentemente a quantidade de bicicletas danificadas ou roubadas.

Este conceito de sistemas de bicicletas partilhadas ganhou grande adesão nos últimos anos, especialmente após o enorme sucesso do SBP de Lyon “*Velo ’v*” em 2005 [7].

O planeamento, a implementação e a operação de sistemas de bicicletas partilhadas vieram criar uma panóplia de novos problemas a serem estudados. A eficiência de um SBP está fortemente dependente das estratégias operacionais implementadas pelos operadores da rede. Uma forma efetiva de melhorar o funcionamento do mesmo consiste em realocar bicicletas de estações com uma lotação acima do desejado para estações com necessidade de bicicletas. Este procedimento é conhecido como rebalanceamento.

Sendo o SBP uma alternativa a outros modos de transporte, conseguir servir a procura de bicicletas torna-se um problema com alto grau de dificuldade, pois existem desequilíbrios inerentes às taxas de recolha e entrega nas várias estações. Este desequilíbrio deve-se ao facto de o SBP poder ser utilizado em sintonia com outros meios de transporte, ou seja, apesar do fluxo de pessoas ser relativamente equilibrado (i.e. as pessoas em geral saem de casa para o trabalho e voltam do trabalho para casa), o utilizador pode escolher utilizar a bicicleta num sentido e no regresso escolher outro meio de transporte. Existem muitas possíveis razões para que tal aconteça, por exemplo: a oferta e frequência de outros meios de transporte à hora desejada, a topografia do caminho a percorrer, as condições meteorológicas.

Com efeito, existem ainda dois grandes desafios aquando da conceção de um esquema de rebalanceamento: prever a procura para o número de bicicletas e de docas livres nas várias estações do sistema; e encontrar a melhor forma de realocar as bicicletas, de forma a satisfazer a procura.

O principal objetivo da análise da procura é conseguir prever a procura futura, permitindo a tomada de decisões operacionais necessárias para que os níveis de serviço desejáveis sejam cumpridos. Neste sentido, existe um número considerável de estudos, relativamente atuais, que se debruçam de forma geral sobre o problema da previsão de procura dos SBP.

Faghih-Imani et al. [8] estimam o impacto das características do terreno e das infraestruturas para bicicletas, assim como das características sociodemográficas na utilização dos SBP.

Vogel et al. [9] constroem, através de “*data mining*”, conjuntos de estações com base em padrões de procura e oferta semelhantes, de forma a compreender as causas temporais e espaciais de desequilíbrio do sistema.

Shu et al. [10] desenvolvem um modelo de fluxos de trânsito de bicicletas na rede operacional, onde o fluxo é estimado pela procura dos utilizadores, assim como o número máximo de viagens que o sistema suporta, sendo posteriormente analisado o efeito da redistribuição de bicicletas na rede do sistema e o respetivo impacto na capacidade das estações.

Nair et al. [11] apresentam uma análise quantitativa do SBP de Paris, “*Vélib*”, que foi um dos primeiros sistemas implementados em grande escala, estudando temas

relevantes que se enumeram: as características do sistema; os padrões de utilização; a ligação entre os transportes públicos e os SBP; e os desequilíbrios de fluxos de bicicletas entre estações.

Rudloff e Lackner [12] constroem um modelo estatístico para a procura de bicicletas, estudando a influência das condições meteorológicas e de estações vizinhas completamente cheias ou vazias.

Na literatura existem duas principais formas de combater a assimetria das viagens e de tornar o sistema mais equilibrado: através de incentivos aos utilizadores ou recorrendo a uma frota de veículos especializados.

Por não ser o tema deste trabalho, e por constrangimentos de tempo e espaço, apenas abordaremos com detalhe as soluções que advêm da utilização de uma frota de veículos especializados. A tal se acrescente que operações de incentivos bem-sucedidas são relativamente reduzidas, no entanto é um tema cada vez mais estudado. Por exemplo, Waserhole e Jost [13] apresentam um mecanismo de preços dinâmicos que força uma procura equilibrada e, conseqüentemente, reduz a necessidade de operações de rebalanceamento.

O rebalanceamento de bicicletas é normalmente efetuado por uma frota de veículos especializados com capacidade limitada. Esta frota está baseada num depósito central e os veículos recolhem bicicletas de estações com níveis de ocupação acima do desejado e entregam em estações com necessidade de bicicletas. Habitualmente, existe um “*buffer*” de bicicletas no depósito que é utilizado de forma a permitir uma maior flexibilidade na operação de rebalanceamento. Este tipo de problema de otimização é conhecido na literatura como “*Bike Sharing Rebalancing Problem*” (BRP), consistindo na construção de rotas de rebalanceamento que minimizam os custos da operação.

O BRP pertence à classe de problemas *Pickup and Delivery Vehicle Routing Problem* (PDVRP) e, de forma mais geral, *Capacitated Vehicle Routing Problem* (CVRP). Este problema pode ser classificado como um *Many-to-Many* (M-M) *Vehicle Routing Problem* (VRP), possuindo múltiplas origens (estações de “*Pickup*”) e múltiplos destinos (estações de “*Delivery*”).

Hernández-Pérez e Salazar-González [14] introduzem *One-commodity Pickup and Delivery Traveling Salesman Problem* (1-PDTSP), uma generalização do conhecido *Traveling Salesman Problem* (TSP), pertencente à classe de problemas M-M PDVRP. O

conjunto dos vértices é composto por um depósito e as estações, sendo os vértices-estação divididos em dois grupos tendo em consideração a sua procura (“*Pickup*” ou “*Delivery*”) que têm de ser visitados uma vez, exatamente, por um veículo com capacidade limitada que satisfaz a procura enquanto minimiza a distância total viajada. Os autores apresentam formulações matemáticas para o problema simétrico e assimétrico, utilizando, para o primeiro caso, um algoritmo de *branch-and-cut* de forma a resolvê-lo exatamente, apresentando ainda os resultados computacionais relevantes.

Existem dois sistemas de rebalanceamento que cumpre distinguir: o rebalanceamento dinâmico, efetuado durante o dia, com o SBP em funcionamento e com níveis de procura e utilização elevados; e o rebalanceamento estático, realizado em horário noturno, geralmente com o sistema encerrado ou com níveis de utilização residuais.

O rebalanceamento dinâmico necessita de ter em consideração que o sistema está a ser usado pelos utilizadores durante a operação, assim como são também determinantes todas as condicionantes implicadas no período de utilização em que a cidade, ou área de ação da rede, por norma está ativa (i.e. horário laboral, trânsito automóvel, etc.).

Shu et al. [10] apresentam um modelo de otimização para o rebalanceamento dinâmico com o objetivo de minimizar o número de clientes insatisfeitos.

Contardo et al. [15] resolvem o problema do rebalanceamento dinâmico com o objetivo de minimizar a procura total não satisfeita, utilizando uma formulação definida numa rede espaciotemporal.

O rebalanceamento estático, o foco deste trabalho, parte da assunção de que a quantidade de bicicletas estacionadas em cada estação, assim como o número ótimo de bicicletas por estação, são conhecidos com antecedência, eliminando todas as restrições provocadas pelo estado ativo do sistema.

Raviv et al. [16] contribuem com uma abordagem nova e prática de modelar o BRP estático, definindo uma função objetivo pouco tradicional que tem em consideração a satisfação dos utilizadores do sistema. A insatisfação dos clientes pode classificar-se como máxima quando uma estação está cheia ou vazia, não permitindo aos clientes devolver ou alugar bicicletas. Para modelar a insatisfação foi utilizada uma função linear do número de bicicletas nas estações. Os autores estudam o problema com múltiplos veículos, com o objetivo de minimizar simultaneamente a insatisfação dos clientes e os

custos da operação. Os autores seguem o pressuposto de que as estações são visitadas no máximo uma vez por rebalanceamento. Adicionalmente, os tempos de serviço são tidos em consideração e existe um limite para a duração da rota de cada veículo. Os autores apresentam, como parte integrante dos resultados do estudo, duas formulações de programação linear inteira testadas em sistemas artificiais.

Chemla et al. [17] classificam o problema de rebalanceamento estático como *Single Vehicle One-commodity Capacitated Pickup and Delivery Problem (SVOCPPD)*, classificação esta que difere do 1-PDTSP, nomeadamente na parte em que o último apresenta uma solução que concretiza obrigatoriamente um circuito Hamiltoniano; enquanto, por outro lado, de forma contrastante, o SVOCPPD permite que os vértices sejam visitados várias vezes, sendo possível utilizar os vértices como depósitos temporários. Com efeito, o facto de ser possível utilizar os vértices como depósito temporário permite uma maior flexibilidade na construção da rota. Assim pode concluir-se que uma solução do 1-PDTSP é uma solução admissível para o SVOCPPD, no entanto, uma solução ótima do SVOCPPD pode ter valor inferior ao valor ótimo do 1-PDTSP pois estamos perante uma relaxação.

Os referidos autores propõem uma formulação matemática para o problema na qual cada estação é replicada tendo em conta o número de vezes que essa mesma estação pode ser visitada, obedecendo a um limite superior. A formulação utiliza variáveis com quatro índices o que conduz a um número elevado de variáveis. Ora, nesta formulação são introduzidas duas relaxações. A primeira utiliza dois conjuntos de variáveis: um correspondente ao número de vezes que cada arco é percorrido e o outro, por sua vez, correspondente ao número de bicicletas a serem transportadas em cada arco. A segunda relaxação apenas possui variáveis que representam o número de vezes que um arco é percorrido. Conclui-se que a segunda relaxação apresenta limites inferiores de melhor qualidade. Os limites superiores foram obtidos através de um algoritmo *Tabu*. Posteriormente foi ainda gerado um conjunto de instâncias com um limite máximo de 100 estações passíveis de serem visitadas. A diferença entre os melhores limites superiores e os limites inferiores é aproximadamente 2%, para instâncias de dimensão média, e até 5% para instâncias de 100 estações.

Erdoğan et al. [18] estudam para o problema estático uma variante do 1-PDTSP, na qual partem do pressuposto de que o número de bicicletas em cada estação, depois de

efetuado o rebalanceamento, pertence a um determinado intervalo de valores, em detrimento de assumir um valor exato. Os autores apresentam uma formulação, tal como dois algoritmos de *branch-and-cut* para a resolução exata do problema. Instâncias que integram até 50 estações foram resolvidas com sucesso, sendo que o algoritmo baseado na decomposição de Bender apresentou os melhores resultados.

Dell’Amico et al. [19] resolvem o problema estático com múltiplos veículos de forma exata, propondo quatro formulações que consideram diferentes variáveis e restrições. Estes autores utilizam igualmente algoritmos de *branch-and-cut*, de forma a resolver as formulações, considerando o número exponencial de restrições das mesmas. São ainda apresentados testes computacionais e comparações de desempenho para as quatro formulações, sendo que a formulação que apresentou melhores resultados foi desenvolvida com base no 1-PDTSP.

3. Desenvolvimento da Metodologia

Neste capítulo serão descritas as várias etapas de resolução deste problema. A fase inicial do estágio consistiu num período utilizado para compreender o funcionamento dos SBP, as dinâmicas muito particulares destes sistemas e os seus principais problemas operacionais. Nesta fase foi ainda possível a deslocação a outras empresas parceiras na gestão operacional do sistema, de forma a compreender as várias etapas relacionadas com a operação de rebalanceamento. Foram ainda recolhidos e analisados dados relativos aos fluxos de utilização do sistema.

Com o intuito de modelar o problema recorreu-se a um grafo completo composto por vértices, a representar as estações, e arcos para as ligações entre estações, com distâncias euclidianas associadas.

Na fase seguinte procedeu-se à formalização do problema, tendo como base os conhecimentos específicos adquiridos na fase inicial do projeto.

Por fim, foram desenvolvidas duas heurísticas de forma a gerar rotas para a operação de rebalanceamento, em tempo razoável.

3.1. Análise dos dados

O estudo levado a cabo neste trabalho recai sobre o sistema de bicicletas públicas partilhadas de Lisboa, comumente conhecido por GIRA. Sabendo que, no momento da realização do presente estudo, o sistema se encontra em constante mutação, crescendo de dia para dia, foram formuladas algumas hipóteses, de forma a mitigar as consequências deste crescimento nos dados analisados.

As estações analisadas estão geograficamente restringidas à zona do Parque das Nações, sendo estas as estações mais antigas e, consequentemente, as mais consolidadas do sistema. Desta forma, podemos olhar para este grupo de estações como uma “ilha” sem grande ligação ao restante sistema, não sofrendo alterações de utilização significativas devido ao aumento da rede de estações. No Anexo 1 incluem-se os dados referentes a esta zona, mapas, coordenadas das estações e distâncias entre as mesmas.

Os dados relativos às viagens realizadas na zona referida supra, nos primeiros meses de 2018 (de 01/01/2018 a 24/04/2018), foram disponibilizados pela EMEL e

contêm informação variada, nomeadamente e com relevância para este estudo, o número de viagens que partem e chegam a cada estação e o detalhe da data e hora das mesmas.

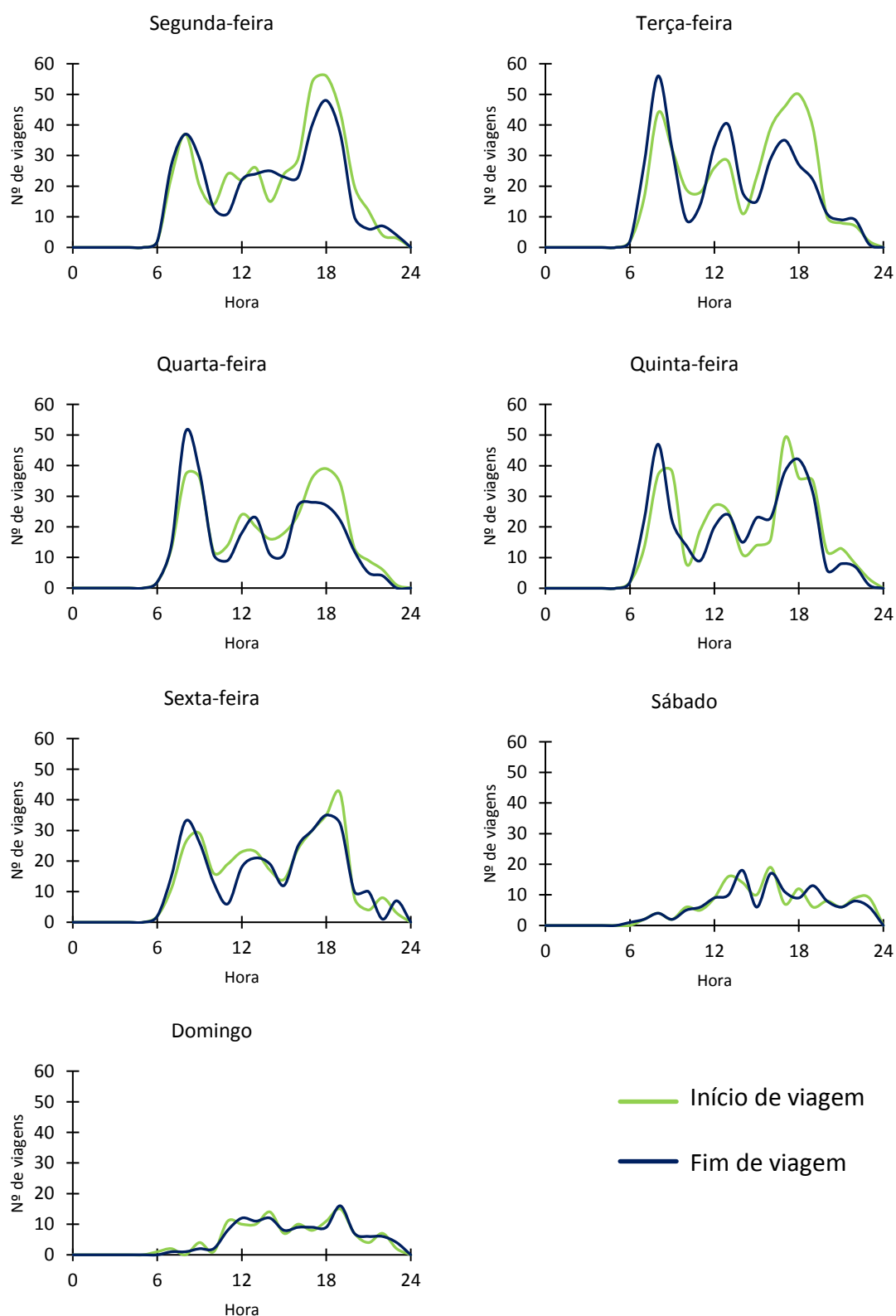


Figura 1 - Fluxos de viagens para a estação 1-Gare do Oriente (março/abril 2018)

Os fluxos de utilização dos SBP variam entre estações e estão dependentes de vários fatores, tais como o dia de semana (i.e. existe uma diferença expressiva entre dias úteis e fins-de-semana), a localização de cada estação (i.e. proximidade de outros meios de transporte), topografia da área, entre outros.

Como é possível observar na Figura 1 que descreve o tráfego da estação 1 para os meses de março e abril, nos dias úteis as horas de ponta são identificáveis pelos picos de procura às 8 horas e às 17 horas, sendo que de manhã o número de bicicletas a chegar é ligeiramente superior ao número de bicicletas a sair; esta relação é inversa para o período da tarde. Este tipo de fluxo pode ser explicado pela proximidade da estação a outras plataformas de transportes públicos. Comparativamente aos dias de semana a procura no fim-de-semana é menor, mais homogénea e equilibrada ao longo do dia, e com maior utilização entre as 11 horas e as 18 horas, consequência de uma utilização sobretudo de lazer.

Podemos ainda fazer uma diferenciação entre estações segundo os fluxos de utilização que apresentam. Nomeadamente, é possível distinguir três grupos de estações (a Figura 2 apresenta as estações escolhidas para representar cada grupo), através de uma consideração do número total de viagens com início e fim em cada estação apenas nos dias úteis para os meses de março e abril:

O primeiro grupo contém estações que seguem um padrão de chegadas e partidas semelhante ao longo do dia (estações 1 e 4).

O segundo grupo é constituído por estações com um pico de chegadas entre as 7 horas e as 9 horas, na hora de ponta da manhã, e um pico de bicicletas a sair nas horas de ponta da tarde entre as 17 horas e as 19 horas (estações 2 e 5).

O terceiro grupo é complementar do grupo 2, sendo composto por estações com um pico de bicicletas a sair entre as 7 horas e as 9 horas, e um pico de chegadas entre as 17 horas e as 20 horas (estações 7, 9 e 10).

As estações 3, 6 e 8 são as estações com menos viagens e localizadas em zonas de lazer ou de menor concentração de emprego, comércio e serviços, consequentemente não apresentam um padrão bem definido.

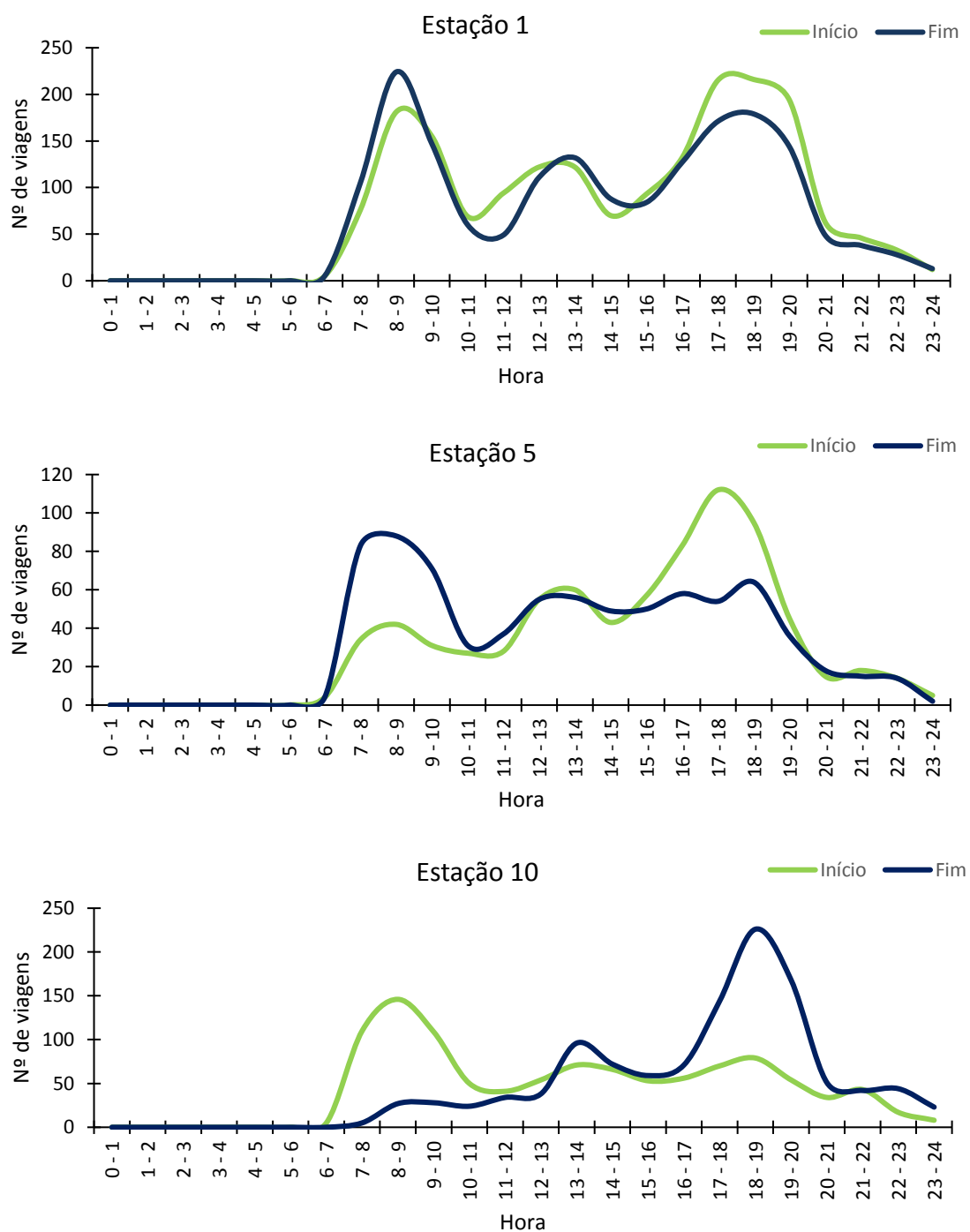


Figura 2 - Fluxos de viagens para estações dos três grupos identificados (março/abril 2018)

Por fim, com o intuito de averiguar e compreender a assimetria dos fluxos de viagens do sistema, foi calculada a diferença entre o número de bicicletas que são depositadas e levantadas em cada estação por dia útil, permitindo saber a diferença entre o número de bicicletas presentes no início do dia e no fim do dia por estação. A distribuição dos resultados obtidos para a estação 1 é apresentada no gráfico da Figura 3, onde o eixo das ordenas representa a classe de diferenças entre chegadas e partidas e o eixo das abcissas apresenta a frequência de ocorrências (número de vezes que uma diferença pertencente a determinada classe ocorreu no período estudado). De forma geral, os resultados seguem uma distribuição normal, como se pode comprovar na Figura 3.b, sendo que o número de bicicletas no início do dia raramente é igual ao número de bicicletas no fim do dia em cada estação, atestando assim a necessidade de pelo menos uma operação de rebalanceamento para o sistema, a ser realizada no final de cada dia.

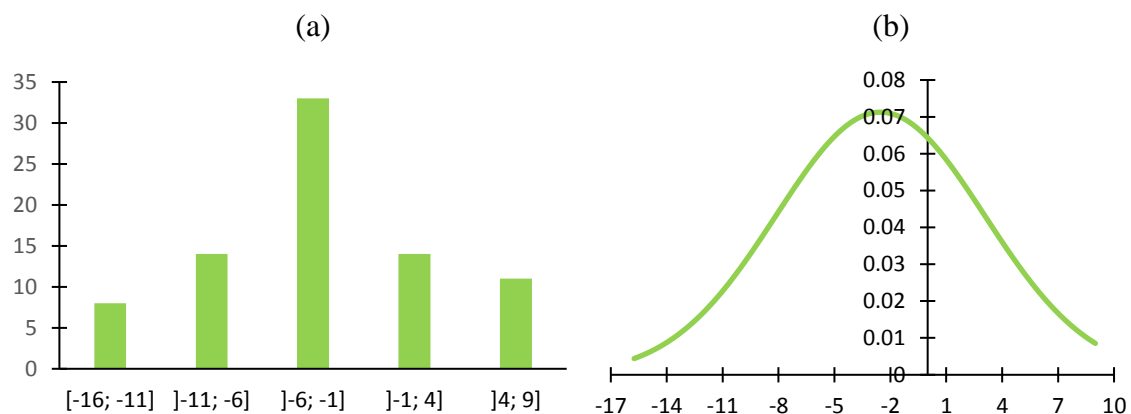


Figura 3 - Distribuição da diferença do número de bicicletas por dia para a estação 1

Uma análise mais profunda e detalhada dos fluxos de viagens dos SBP e hábitos dos seus utilizadores está fora do âmbito do presente trabalho, no entanto é referida literatura sobre este tópico no capítulo 2.

3.2. Formulação Matemática do Problema

Como referido anteriormente, o presente trabalho trata o problema do rebalanceamento de bicicletas para o SBP de Lisboa. Mais concretamente, é estudado o problema do rebalanceamento estático, com o objetivo de determinar as rotas de comprimento total mínimo, de forma a posicionar o número de bicicletas pretendido em cada uma das estações. A formulação apresentada para um único veículo tem como base o trabalho realizado por Dell’Amico et al. [19], no qual os autores apresentam quatro formulações distintas para o BRP. Em concreto, para o presente trabalho, é tida em especial consideração a formulação 2 do referido estudo, que tem como ponto de partida um TSP com múltiplos veículos, onde são acrescentadas restrições de forma a ponderar a carga do veículo.

Seja conhecido o grafo completo $G = (V, A)$, onde V representa o conjunto de vértices do grafo e A o conjunto de arcos. O conjunto de vértices $V = \{0, 1, \dots, n\}$ está repartido entre o depósito 0 e as estações $V \setminus \{0\}$. O custo (distância) de viajar entre dois vértices (i, j) é dado por c_{ij} . Cada estação i tem uma procura q_i associada, sendo que $q_i > 0$ ($q_i < 0$) significa que i é uma estação de *pickup* (*delivery*). No caso de a procura ser nula ($q_i = 0$) assume-se, de modo a simplificar, que a estação também tem de ser visitada. Q é a capacidade máxima do veículo.

Em resumo, considera-se

i, j – Índices representativos dos vértices do grafo (estações).

(i, j) – Arco de ligação entre os vértices i e j .

Conjuntos

V – Conjunto dos vértices (depósito e estações).

A – Conjunto dos arcos.

S – Subconjunto do conjunto dos vértices.

0 – Depósito.

n – Número de estações.

Parâmetros

c_{ij} – Custo de percorrer o arco $(i, j) \in A$.

Q – Capacidade do veículo.

q_i – Procura do vértice $i \in V \setminus \{0\}$.

Variáveis inteiras

f_{ij} – Carga do veículo ao percorrer o arco (i, j) .

u_i – Variável auxiliar para a eliminação de subcircuitos, que indica a ordem do vértice i na rota.

Variáveis binárias

$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o arco } (i, j) \text{ é percorrido} \\ 0, & \text{c. c.} \end{cases}$, para qualquer arco (i, j) pertencente a A .

Função Objetivo

$$(1) \quad \text{Min } \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$

A função objetivo (1) consiste em minimizar o custo (distância) total de rebalancear o sistema.

Restrições

$$(2) \quad \sum_{i \in V \setminus \{j\}} x_{ij} = 1 \quad j \in V$$

$$(3) \quad \sum_{i \in V \setminus \{j\}} x_{ji} = 1 \quad j \in V$$

$$(4) \quad \sum_{i \in V \setminus \{j\}} f_{ji} - \sum_{i \in V \setminus \{j\}} f_{ij} = q_j \quad j \in V \setminus \{0\}$$

$$(5) \quad \max\{0, q_i, -q_j\} x_{ij} \leq f_{ij} \leq \min\{Q, Q + q_i, Q - q_j\} x_{ij} \quad (i, j) \in A$$

$$(6) \quad u_o = 1$$

$$(7) \quad 2 \leq u_i \leq n + 1 \quad i \neq 0$$

$$(8) \quad u_i - u_j + 1 \leq n(1 - x_{ij}) \quad i \neq 0, j \neq 0$$

$$(9) \quad x_{ij} \in \{0, 1\} \quad (i, j) \in A$$

As restrições (2) e (3) asseguram que todas as estações são visitadas exatamente uma vez e que o veículo sai e entra uma vez no depósito. São necessários dois conjuntos de restrições para controlar o fluxo de bicicletas nos arcos: as restrições (4) permitem manter o equilíbrio entre os fluxos que entram e saem de cada vértice, tendo em consideração a procura; as restrições (5) estabelecem um intervalo de valores para o fluxo em cada arco, garantindo que a capacidade do veículo não é excedida. As restrições (5) permitem diminuir a amplitude do intervalo dos valores de fluxo. Caso o arco (i, j) seja percorrido ($x_{ij} = 1$), então o limite inferior para f_{ij} deverá ser maior que a procura da estação de origem q_i (se $q_i > 0$), pois o veículo acabou de recolher q_i . Assim como, caso a procura do vértice destino seja negativa $q_j < 0$, o fluxo deverá ser maior que $-q_j$, pois a procura do destino tem de ser servida. O raciocínio para o limite superior é análogo. Na ocorrência de q_i negativo então a capacidade disponível do veículo passa a ser $Q + q_i$, tal como a capacidade disponível do veículo irá assumir o valor máximo $Q - q_j$ para $q_j > 0$. O conjunto de restrições (6), (7) e (8) tem como base a formulação de *Miller-Tucker-Zemlin* (MTZ) para o TSP [20] e garante que não existem subcircuitos que não incluem o depósito na solução do problema. A variável auxiliar u_i assume a posição do vértice i na rota. A restrição (6) atribui ao depósito o vértice de partida $u_0 = 1$, enquanto as restrições (8) forçam $u_j \geq u_i + 1$ quando o arco (i, j) é percorrido ($x_{ij} = 1$). Este conjunto de restrições foi implementado na formulação apresentada em substituição das clássicas restrições de eliminação de subcircuitos (10):

$$(10) \quad \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1 \quad S \subseteq V \setminus \{0\}, S \neq \emptyset$$

A grande vantagem das restrições de MTZ é o seu número reduzido quando comparado com o das restrições clássicas de eliminação de subcircuitos, que aumenta de forma exponencial com o aumento da dimensão da instância. Esta alteração permitiu, e tendo em consideração as limitações de *software*, resolver o problema de forma exata, para todas as instâncias de teste. Por fim, as restrições (9) definem as variáveis x_{ij} como binárias.

3.3. Heurísticas

Considerando a complexidade do problema em estudo e, de forma geral, de todos os BSP, é fundamental o desenvolvimento de uma abordagem de resolução heurística. Uma boa abordagem heurística permite a obtenção de soluções de boa qualidade em tempo útil, algo que não é atingível de forma exata para redes de grandes dimensões.

Neste capítulo são apresentadas duas heurísticas, uma de vizinho mais próximo, que tem em consideração a capacidade do veículo e a procura das estações, e outra que se foca apenas em apresentar soluções admissíveis.

A notação utilizada nos pseudocódigos apresentados está descrita na Tabela I.

Tabela I - Notação pseudocódigo

Designação	Descrição
<i>Carga do veículo</i>	Carga do veículo ao percorrer o arco (i, j)
<i>Custo(i, j)</i>	Custo de percorrer o arco (i, j)
<i>Custo mínimo</i>	Variável auxiliar que representa o custo mínimo encontrado
<i>Custo total</i>	Custo total da operação de rebalanceamento
<i>Destino</i>	Variável auxiliar destino
<i>Origem</i>	Variável auxiliar origem
<i>Procura(i)</i>	Procura do vértice i
<i>Procura Total</i>	Soma da procura dos vértices de $V \setminus \{0\}$
<i>Q</i>	Capacidade do veículo
<i>Rota</i>	Conjunto dos arcos (i, j) percorridos
<i>V_{ORD}</i>	Conjunto dos vértices de $V \setminus \{0\}$ ordenados por ordem decrescente do valor absoluto das procuras
<i>V_R</i>	Conjunto dos vértices visitados

3.3.1 Heurística 1

A heurística 1 tem como objetivo encontrar soluções de relativa qualidade e em tempo útil para o problema em estudo. Esta tem como base um algoritmo de vizinho mais próximo, tendo ainda em consideração as procuras das estações e a capacidade do veículo. Este tipo de algoritmo é de certa forma “miope”, uma vez que considera apenas a distância mais curta para cada iteração e como tal não tem uma visão geral do problema.

O pseudocódigo da heurística 1 é apresentado na Figura 4, sendo composto por três fases distintas: uma primeira fase de leitura de dados, uma fase de inicialização, e por fim, uma fase iterativa.

O procedimento tem início com a leitura de informação relevante para a resolução do problema: informação sobre a matriz com as distâncias entre todos os pares de vértices do grafo, a procura de cada estação e a capacidade do veículo.

No momento inicial do rebalanceamento do problema, o veículo parte do depósito, sendo a sua carga determinada pela soma das procuras de todas as estações. Caso a soma das procuras seja nula ou positiva, o veículo parte vazio do depósito, caso contrário, o veículo abandona o depósito com um número de bicicletas igual ao simétrico da soma das procuras.

De seguida, em cada iteração, são testadas as estações que ainda não foram visitadas pelo veículo. Com efeito, do grupo de próximos destinos possíveis, é escolhida a estação mais próxima (custo de deslocação menor), cuja procura possa ser satisfeita tendo em consideração o número de bicicletas disponíveis, assim como a capacidade do veículo. O vértice de destino é adicionado ao conjunto dos vértices visitados e o arco percorrido é adicionado à rota. A carga do veículo é atualizada e o custo de rebalanceamento correspondente é incrementado. Caso não seja encontrado um vértice destino que cumpra os requisitos, o procedimento é terminado.

Por fim, posteriormente a todas as estações serem visitadas, é acrescentada à rota a viagem de regresso ao depósito e o custo de rebalanceamento atualizado.

```

//Leitura de dados:
     $Q$ 
     $G = (V, A), \text{Depósito} \in V$ 
     $\text{Procura}(i), i \in V; \text{custo}(i, j), (i, j) \in A$ 
//Inicialização
     $\text{Procura Total} := \sum_{i=1}^{|V|} q_i$ 
     $\text{Rota} := \{\}$ 
     $\text{Custo total} := 0$ 
     $\text{Origem} := \text{Depósito}$ 
     $V_R := \{\text{Depósito}\}$ 
    Se ( $\text{Procura Total} \geq 0$ )
         $\text{Carga do veículo} := 0$ 
    Senão
         $\text{Carga do veículo} := -\text{Procura Total}$ 
    FimSe
//Iteração
    Para  $i=1$  até  $|V|-1$ 
         $\text{Custo mínimo} := \infty$ 
        Para  $j \in V \setminus V_R$ 
            Se ( $0 \leq \text{Carga do veículo} + \text{Procura}(j) \leq Q$ ) e ( $\text{Custo mínimo} >$ 
             $\text{custo}(\text{origem}, j)$ )
                 $\text{Custo mínimo} := \text{custo}(\text{origem}, j)$ 
                 $\text{Destino} := j$ 
            FimSe
        FimPara
        Se ( $\text{Custo mínimo} = \infty$ )
            FIM não consegue encontrar uma solução admissível
        FimSe
         $V_R := V_R \cup \{\text{Destino}\}$ 
         $\text{Rota} := \text{Rota} \cup \{(\text{Origem}, \text{Destino})\}$ 
         $\text{Custo total} := \text{Custo total} + \text{custo}(\text{Origem}, \text{Destino})$ 
         $\text{Carga do veículo} := \text{Carga do veículo} + \text{Procura}(\text{Destino})$ 
         $\text{Origem} := \text{Destino}$ 
    FimPara
     $\text{Rota} := \text{Rota} \cup \{(\text{Origem}, \text{Depósito})\}$ 
     $\text{Custo total} := \text{Custo total} + \text{custo}(\text{Origem}, \text{Depósito})$ 

```

Figura 4 - Pseudocódigo da heurística 1

3.3.2 Heurística 2

A heurística 2 tem como principal objetivo a obtenção de uma solução admissível para o problema. Ao contrário da heurística 1, que tem em consideração as distâncias percorridas e procura minimizar os custos de rebalancear o sistema, a heurística 2 não se preocupa com os custos da operação. Nesta, para que seja possível obter soluções admissíveis para os vários cenários possíveis, os vértices são ordenados de forma decrescente relativamente ao valor absoluto da sua procura, e visitados seguindo esta ordem e tendo em consideração a capacidade do veículo. Desta forma, os vértices com menores valores absolutos de procura são os últimos a ser visitados, diminuindo a probabilidade de existirem problemas de capacidade do veículo para satisfazer as procuras.

O pseudocódigo da heurística 2 é apresentado na Figura 5, sendo composto por três fases distintas: uma primeira fase de leitura de dados, uma fase de inicialização, e por fim, uma fase iterativa.

Os momentos de leitura de dados e inicialização são análogos aos da heurística 1, exceto a determinação da lista dos vértices ordenados de forma decrescente em relação ao valor absoluto da procura dos mesmos, que é acrescentado na heurística 2.

Em cada iteração são testadas as estações que ainda não foram visitadas pelo veículo. Com efeito, do grupo de próximos destinos possíveis, é escolhida a estação com maior valor absoluto de procura, cuja procura possa ser satisfeita tendo em consideração o número de bicicletas disponíveis, assim como a capacidade do veículo. O vértice destino é retirado ao conjunto dos vértices ordenados (possíveis destinos), e o arco percorrido é adicionado à rota. A carga do veículo é atualizada e o custo de rebalanceamento correspondente é incrementado. Caso não seja encontrado um vértice destino que cumpra os requisitos, o procedimento é terminado.

Por fim, posteriormente a todas as estações serem visitadas, é acrescentada à rota a viagem de regresso ao depósito e o custo de rebalanceamento atualizado.

```

//Leitura de dados:
     $Q$ 
     $G = (V, A), Depósito \in V$ 
     $Procura(i), i \in V; custo(i, j), (i, j) \in A$ 
//Inicialização
    Determinar  $V_{ORD}$ 
     $Procura\ Total := \sum_{i=1}^{|V|} q_i$ 
     $Rota := \{\}$ 
     $Custo\ total := 0$ 
     $Origem := Depósito$ 
    Se ( $Procura\ Total \geq 0$ )
         $Carga\ do\ veículo := 0$ 
    Senão
         $Carga\ do\ veículo := -Procura\ Total$ 
    FimSe
//Iteração
    Enquanto ( $V_{ORD} \neq \emptyset$ )
         $encontrei := false$ 
        Enquanto ( $Não(encontrei)$ )
             $j := \text{elemento de } V_{ORD}, \text{ respeitando a ordem}$ 
            Se ( $0 \leq Carga\ do\ veículo + Procura(j) \leq Q$ )
                 $Destino := j$ 
                 $encontrei := true$ 
                retirar  $j$  de  $V_{ORD}$ 
            FimSe
            Se ( $\text{todos os } j \in V_{ORD} \text{ testados}$ ) e ( $encontrei = false$ )
                FIM não consegue encontrar uma solução admissível
            FimSe
        FimEnquanto
         $Rota := Rota \cup \{(Origem, Destino)\}$ 
         $Custo\ total := Custo\ total + custo(Origem, Destino)$ 
         $Carga\ do\ veículo := Carga\ do\ veículo + Procura(Destino)$ 
         $Origem := Destino$ 
    FimEnquanto
     $Rota := Rota \cup \{(Origem, Depósito)\}$ 
     $Custo\ total := Custo\ total + custo(Origem, Depósito)$ 

```

Figura 5 - Pseudocódigo da heurística 2

4. Apresentação de Resultados

No presente capítulo serão apresentados e analisados os resultados obtidos neste estudo. Foram criados vários conjuntos de instâncias, de modo a testar o desempenho tanto da formulação como das heurísticas apresentadas.

4.1. Instâncias de teste

De forma a testar a qualidade da formulação e das heurísticas, apresentadas no capítulo anterior, foram criados quatro conjuntos de instâncias com características distintas, de forma a simular cenários diferenciados. As procuras para cada estação foram geradas aleatoriamente, de forma uniforme, tendo em consideração alguns fatores por grupo:

Grupo de teste 1 contém instâncias com procura por estação pertencente ao intervalo $[-5; 5]$, e somatório de procuras pertencente ao intervalo $[-7; 7]$;

Grupo de teste 2 contém instâncias com procura por estação pertencente ao intervalo $[-5; 5]$, e somatório de procuras pertencente ao intervalo $[-14; -8] \cup [8; 14]$;

Grupo de teste 3 contém instâncias com procura por estação pertencente ao intervalo $[-10; 10]$, e somatório de procuras pertencente ao intervalo $[-7; 7]$;

Grupo de teste 4 contém instâncias com procura por estação pertencente a $[-10; 10]$, e somatório de procuras pertencente ao intervalo $[-14; -8] \cup [8; 14]$;

Estes cenários foram concebidos tendo em consideração a capacidade do veículo, que se assume ser fixa e com uma dimensão de 14 ($Q = 14$) para todas as instâncias, garantindo assim que é possível rebalancear o sistema. Os cenários apresentados procuram simular quer situações em que a procura pode ser maior ou menor em valor absoluto, quer situações em que a rede, no seu todo, está mais ou menos equilibrada. No Anexo 2 incluem-se as instâncias.

4.2. Resultados dos testes

Os resultados foram obtidos através de testes realizados em Excel com um processador Intel Core i5-3317U a 1.70GHz. Recorreu-se ao *software* OpenSolver para a

resolução de forma exata do prolema, enquanto as heurísticas foram programadas em VBA. Os resultados obtidos são apresentados na Tabela II, onde o tempo de processamento é representado em segundos e a solução corresponde ao custo total de rebalancear o sistema (distância total percorrida em quilómetros).

Tabela II - Resultados

Instância	Grupo	Formulação		Heurística 1		Heurística 2	
		Tempo (s)	Solução (F)	Tempo (s)	Solução (H ₁)	Tempo (s)	Solução (H ₂)
1	1	3.49	13.187	0.03	13.897	0.03	21.333
2	1	2.68	13.187	0.02	13.187	0.06	19.651
3	1	3.36	13.187	0.02	14.760	0.03	20.444
4	1	2.54	13.187	0.02	13.187	0.02	20.982
5	1	3.25	13.356	0.02	15.268	0.03	19.725
6	1	1.55	13.187	0.02	14.280	0.02	18.431
7	1	4.03	13.187	0.02	14.301	0.02	20.545
8	1	5.52	13.187	0.02	13.636	0.02	19.389
9	1	5.07	13.187	0.03	14.660	0.02	23.382
10	1	1.08	13.187	0.02	13.724	0.02	18.424
11	2	1.3	13.187	0.02	13.636	0.02	16.210
12	2	4.84	14.367	0.02	16.149	0.02	18.155
13	2	2.37	13.528	0.02	13.911	0.02	22.880
14	2	5.23	15.342	0.04	16.568	0.03	18.562
15	2	2.1	13.187	0.02	13.187	0.02	18.205
16	2	0.8	13.187	0.03	13.187	0.02	17.134
17	2	1.73	13.986	0.02	14.571	0.03	22.094
18	2	1.97	13.187	0.02	14.019	0.03	17.768
19	2	2.2	13.187	0.02	14.019	0.02	19.809
20	2	4.54	13.527	0.03	13.911	0.02	16.765
21	3	4.03	13.356	0.02	13.682	0.02	16.514
22	3	2.45	13.844	0.02	16.446	0.02	20.529
23	3	2.13	14.101	0.02	15.015	0.02	20.112
24	3	2.19	13.806	-	-	0.03	19.298
25	3	2.5	13.356	0.02	14.743	0.02	20.571
26	3	1.72	13.758	0.02	13.856	0.02	18.701
27	3	3.98	14.241	0.02	15.360	0.02	18.435
28	3	3.29	13.572	-	-	0.03	18.579
29	3	9.24	13.527	0.02	15.251	0.03	20.607
30	3	3.7	15.295	0.02	17.582	0.03	21.587
31	4	2.42	13.631	0.02	14.202	0.03	17.626
32	4	1.7	13.489	0.02	16.246	0.02	19.606
33	4	3.09	13.679	0.02	14.344	0.02	18.297
34	4	15.96	14.965	0.05	17.539	0.02	22.152
35	4	4.35	13.933	0.02	14.390	0.03	22.786
36	4	4.16	13.187	0.02	13.187	0.02	23.085
37	4	1.39	13.970	0.02	17.277	0.02	20.354
38	4	3.31	15.015	0.02	17.731	0.02	20.283
39	4	0.64	13.509	0.02	14.202	0.03	17.586
40	4	4.71	16.355	0.03	20.628	0.03	22.884
Média		3.415	13.733	0.023	14.888	0.025	19.737

A Tabela III apresenta, por grupo de instâncias, o número de instâncias resolvidas, o desvio médio, o desvio mínimo e o desvio máximo do valor das heurísticas relativamente ao ótimo. Os desvios das duas heurísticas foram calculados para cada instância $n = 1, \dots, 40$, segundo a fórmula $gap_k = (H_k - F)/F \times 100$, sendo H_k o valor da solução da heurística k e F o valor da solução ótima. No Anexo 3 incluem-se os resultados dos desvios por instância, assim como as rotas geradas para uma instância.

Tabela III – Desvios dos resultados por grupo

Grupo	Heurística 1				Heurística 2			
	Nº IR	Média	Min	Max	Nº IR	Média	Min	Max
1	10	0.067	0.00	0.143	10	0.532	0.397	0.773
2	10	0.046	0.00	0.124	10	0.374	0.210	0.691
3	8	0.093	0.07	0.188	10	0.404	0.236	0.540
4	10	0.123	0.00	0.261	10	0.446	0.293	0.751
Total	38	0.082	0.00	0.261	40	0.439	0.210	0.773

4.3. Análise de Resultados

Podemos observar, através dos resultados expostos, que a heurística 1 apresenta soluções relativamente boas, em média 8,2% piores que a formulação, no entanto o tempo de computação da heurística 1, mesmo para instâncias com apenas 10 estações, é significativamente inferior ao da formulação. A heurística 1 apresenta, porém, limitações, uma vez que não consegue encontrar soluções admissíveis para 5% das instâncias testadas.

A heurística 2 consegue encontrar soluções admissíveis para todas as instâncias testadas e apresenta tempos de computação semelhantes aos da heurística 1, porém as soluções são significativamente piores, dado que apresenta soluções com um custo, em média, superior em 43,9% ao da formulação.

Analisando os resultados da heurística 1, por grupo de instâncias, podemos aferir que nos grupos de teste 1 e 2, grupos estes compostos pelas procuras com valor absoluto menor (procuras pertencentes ao intervalo $[-5; 5]$), a heurística 1 teve a sua melhor prestação, conseguindo resolver todas as instâncias e apresentando soluções em média

5,7% $((6,7 + 4,6)/2)$ piores que as da formulação. A qualidade das soluções encontradas pela heurística 1, para os restantes grupos de instâncias, decresce, assumindo um desvio médio de 9,3% para o grupo de teste 3 e de 12,3% para o grupo de teste 4 em relação à formulação, sendo que para o grupo 3 apenas conseguiu resolver 80% das instâncias.

Os resultados apresentados expõem a fragilidade da heurística 1 que, apesar dos resultados relativamente bons para instâncias com procuras reduzidas e dos tempos de computação significativamente inferiores, não consegue resolver 5% das instâncias. Os desempenhos da heurística pioram com o aumento do valor absoluto da procura das estações. Tal pode ser explicado, pelo facto de a heurística 1 ter por base um algoritmo *greedy*, que procura a melhor ligação em cada momento, sem ter em consideração as consequências para o resto da rota. Esta fragilidade é agravada nas instâncias com procuras absolutas próximas da capacidade do veículo, impossibilitando em alguns casos a conclusão da rota.

A heurística 2 apresenta os piores resultados para o grupo de teste 1, com um desvio médio de 53,2% em relação à formulação. No grupo de teste 1 as procuras são menores, assim as qualidades intrínsecas da heurística 2 perdem relevância, pois as restrições de capacidade raras vezes são responsáveis pela decisão. Para os restantes grupos, os resultados da heurística 2 são relativamente melhores, apresentando soluções em média 40,8% $((37,4 + 40,4 + 44,6)/3)$ piores que as da formulação.

5. Conclusões

A operação de rebalanceamento de um Sistema de Bicicletas Partilhadas (SBP) é fundamental para o bom funcionamento do mesmo, permitindo aos utilizadores dispor de todo o potencial de um meio de transporte em grande crescimento por todo o mundo.

A EMEL, empresa que acolheu este estágio, tem a seu cargo a implementação e gestão do SBP de Lisboa. O presente trabalho dá um primeiro passo no sentido de otimizar a operação de rebalanceamento do sistema de bicicletas partilhadas de Lisboa.

O problema de otimizar a operação de rebalanceamento de um SBP é tratado neste trabalho de forma estática, considerando que o rebalanceamento é feito no período noturno quando o sistema não está em utilização.

É obtida uma solução exata para o problema com base no *One-commodity Pickup and Delivery Traveling Salesman Problem* (1-PDTSP) introduzido por Hernández-Pérez e Salazar-González [14]. Considerando a dimensão e complexidade deste tipo de problemas, as soluções exatas perdem espaço em virtude do tempo computacional necessário para produzir soluções para instâncias de grandes dimensões. São então propostas duas heurísticas de forma a obter soluções admissíveis em tempo útil. É ainda gerado um conjunto de instâncias de teste de forma a compreender o desempenho da formulação e das heurísticas. Os testes são feitos em Excel, utilizando o software OpenSolver para a formulação, enquanto as heurísticas foram programadas em VBA.

A heurística 1 apresenta tempos de computação significativamente inferiores e soluções relativamente boas, no entanto apenas consegue encontrar uma solução admissível em 95% das instâncias.

A heurística 2 consegue encontrar uma solução admissível para todas as instâncias, apresenta tempos de computação semelhantes aos da heurística 1, porém a qualidade das soluções é significativamente pior.

Não expondo este trabalho uma metodologia de implementação imediata, é dado um primeiro passo na compreensão, análise e resolução do problema em estudo.

Posto isto, foram identificadas algumas oportunidades de melhoria para desenvolvimentos futuros, das quais se destacam:

- **A expansão da área de atuação, de forma a abranger toda a rede de estações.** O presente estudo está geograficamente limitado à zona do Parque

das Nações. Porém, no futuro, com a rede de estações totalmente implementada, será interessante expandir a área de estudo de forma a abranger todas as estações em atividade.

- **As distâncias entre estações devem considerar o mapa rodoviário e sentidos de circulação.** Foram utilizadas distâncias Euclidianas entre estações de forma a produzir a matriz de distâncias utilizada nos testes. Esta simplificação acaba por afastar os resultados da realidade, pois o mapa rodoviário, assim como os sentidos de circulação, podem ter um impacto significativo na distância a percorrer entre dois pontos da cidade de Lisboa.
- **A introdução de vários veículos especializados e de tempos de serviço com carregamento e descarregamento de bicicletas.** Seria interessante considerar a duração dos turnos da atividade de rebalanceamento e os veículos disponíveis por turno no modelo. A introdução dos tempos de serviço com o carregamento e descarregamento das bicicletas, juntamente com os turnos e o número de veículos em atividade, conseguiria retratar de forma mais aproximada as limitações espaciotemporais da operação.
- **A possibilidade de visitar cada estação mais de uma vez, permitindo a utilização de estações como depósitos temporários.** No presente trabalho foi assumido que cada estação é visitada exatamente uma vez na rota. Em desenvolvimentos futuros, seria interessante permitir que as estações pudessem ser visitadas mais do que uma vez, permitindo assim que funcionem como depósitos temporários. Este tipo de utilização encontra fundamento na bibliografia apresentada e consegue oferecer maior flexibilidade à operação de rebalanceamento produzindo, consequentemente, melhores resultados.
- **Uma heurística melhorativa que garanta a obtenção de uma solução admissível.** As heurísticas apresentadas no presente trabalho não garantem a obtenção de uma solução admissível para o problema. Esta fragilidade

pode ser eliminada em desenvolvimentos futuros através da introdução de melhoramentos diretos às heurísticas apresentadas, ou através de uma heurística melhorativa que tenha em consideração as procuras das estações que ainda não foram visitadas em cada momento de decisão, garantindo que a capacidade do veículo é suficiente para satisfazer as procuras.

- **Estudar o problema de rebalanceamento dinâmico.** O rebalanceamento estático permite que a maioria das estações se encontre em condições de responder à utilização diária habitual. Porém, existe um conjunto de estações que, pelas suas características específicas - por exemplo as localizadas junto a interfaces de transportes públicos ou grandes centros empresariais - necessitam de ser rebalanceadas durante o dia, de forma dinâmica, com o objetivo de responder a uma procura extremamente elevada e assimétrica em determinados períodos. É ainda de referir que os resultados alcançados serão melhores quando ambos os modelos de rebalanceamento forem aplicados, com sucesso, simultaneamente.

Referências

- [1] EMEL E.M. S.A., “Relatório e Contas EMEL 2017”, [Online]. Available: https://www.emel.pt/fotos/financeiro/relatorio_contas_assinado_completo_18557480675b7317cab963b.pdf. [Acedido em 11-10-2018].
- [2] EMEL E.M. S.A., “Plano de Atividades e Orçamento 2018”, [Online]. Available: https://www.emel.pt/fotos/financeiro/pao_emel_2018_assinado_6847975065b71ab148a267.pdf. [Acedido em 11-10-2018].
- [3] Institute for Transportation & Development Policy, The Bikeshare Planning Guide, 2018.
- [4] “World population by year”, [Online]. Available: <http://www.worldometers.info/world-population/world-population-by-year/>. [Acedido em 22-10-2018].
- [5] Institute for Transportation & Development Policy, The Bike-share Planning Guide, 2013.
- [6] EMEL E.M. S.A., “Responsabilidade Social 2018”, [Online]. Available: https://www.emel.pt/fotos/gca/declaracao_responsabilidade_social_4143372655b33c6ae313b4.pdf. [Acedido em 20-10-2018].
- [7] P. DeMaio, “Bike-sharing: History, Impacts, Models of Provision, and Future”, *Journal of Public Transportation*, vol. 12, nº 4, pp. 41-56, 2009.
- [8] A. Faghih-Imani, R. Hampshire, L. Marla e N. Eluru, “An Empirical Analysis of Bike Sharing Usage and Rebalancing: Evidence from Barcelona and Seville”, *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, vol. 97, pp. 177-191, 2017.
- [9] P. Vogel, T. Greiser e D. C. Mattfeld, “Understanding Bike-Sharing Systems using Data Mining”, *Procedia Social and Behavioral Sciences*, nº 20, pp. 514-523, 2011.
- [10] J. Shu, M. C. Chou, Q. Liu, C.-P. Teo e I.-L. Wang, “Models for Effective Deployment and Redistribution of Bicycles within Public Bicycle-Sharing Systems”, *Operations Research*, vol. 61, nº 6, pp. 1346-1359, 2013.
- [11] R. Nair, E. Miller-Hooks, R. C. Hampshire e A. Bušić, “Large-Scale Vehicle Sharing Systems: Analysis of Vélib”, *International Journal of Sustainable Transportation*, vol. 7, nº 1, pp. 85-106, 2013.

- [12] C. Rudloff e B. Lackner, “Modeling Demand for Bikesharing Systems - Neighboring Stations as Source for Demand and Reason for Structural Breaks”, *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, vol. 2430, pp. 1-11, 2014.
- [13] A. Waserhole e V. Jost, “Pricing in Vehicle Sharing Systems: Optimization in queuing networks with product forms”, *EURO Journal on Transportation and Logistics*, vol. 5, nº 3, pp. 293-320, 2016.
- [14] H. Hernández-Pérez e J.-J. Salazar-González, “A branch-and-cut algorithm for a traveling salesman problem with pickup and delivery”, *Discrete Applied Mathematics*, vol. 145, pp. 126-139, 2004.
- [15] C. Contardo, C. Morency e L.-M. Rousseau, “Balancing a dynamic public bike-sharing system”, *CIRRELT*, 2012.
- [16] T. Raviv, M. Tzur e I. A. Forma, “Static repositioning in a bike-sharing system: models and solution approaches”, *EURO J Transp Logist*, vol. 2, pp. 187-229, 2013.
- [17] D. Chemla, F. Meunier e R. W. Calvo, “Bike sharing systems: Solving the static rebalancing problem”, *Discrete Optimization*, vol. 10, pp. 120-146, 2013.
- [18] G. Erdoğan, G. Laporte e R. W. Calvo, “The Static Bicycle Relocation Problem with Demand Intervals”, *European Journal of Operational Research*, vol. 238, pp. 451-457, 2014.
- [19] M. Dell'Amico, E. Hadjicostantinou, M. Iiori e S. Novellani, “The bike sharing rebalancing problem: Mathematical formulations and benchmark instances”, *Omega*, vol. 45, pp. 7-19, 2014.
- [20] C. E. Miller, A. W. Tucker e R. A. Zemlin, “Integer Programming Formulation of Traveling Salesman Problems”, *Journal of the ACM*, vol. 7, pp. 326-329, 1960.

Anexos

Anexo 1 – Dados do problema e área de atuação

Tabela IV - Identificação da estação, Nome e Localização

Estação	Nome	Latitude	Longitude
0	Depósito	38.74746	-9.14707
1	Gare do Oriente	38.76672	-9.09732
2	CC Vasco da Gama	38.76855	-9.09622
3	Alameda dos Oceanos-Rua dos Argonautas	38.75616	-9.09680
4	Porta do Mar	38.75916	-9.09644
5	Jardim da Água	38.76122	-9.09502
6	Jardim Garcia da Orta	38.76946	-9.09251
7	Rotunda dos Vice-Reis	38.77451	-9.09542
8	Rua do Bojador	38.77429	-9.09235
9	Alameda dos Oceanos-Rua do Zambeze	38.77759	-9.09467
10	Rua de Moscavide	38.77847	-9.09707

Tabela V - Matriz de distâncias em quilómetros

c_{ij}	Dep	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Dep	10000	4.816	4.993	4.465	4.579	4.765	5.326	5.394	5.604	5.644	5.539
1	4.816	10000	0.225	1.175	0.844	0.643	0.517	0.882	0.946	1.231	1.307
2	4.993	0.225	10000	1.378	1.045	0.822	0.338	0.666	0.721	1.014	1.105
3	4.465	1.175	1.378	10000	0.335	0.583	1.525	2.043	2.052	2.390	2.480
4	4.579	0.844	1.045	0.335	10000	0.260	1.195	1.709	1.720	2.055	2.148
5	4.765	0.643	0.822	0.583	0.260	10000	0.942	1.478	1.472	1.821	1.926
6	5.326	0.517	0.338	1.525	1.195	0.942	10000	0.615	0.537	0.923	1.077
7	5.394	0.882	0.666	2.043	1.709	1.478	0.615	10000	0.267	0.349	0.463
8	5.604	0.946	0.721	2.052	1.720	1.472	0.537	0.267	10000	0.419	0.619
9	5.644	1.231	1.014	2.390	2.055	1.821	0.923	0.349	0.419	10000	0.229
10	5.539	1.307	1.105	2.480	2.148	1.926	1.077	0.463	0.619	0.229	10000

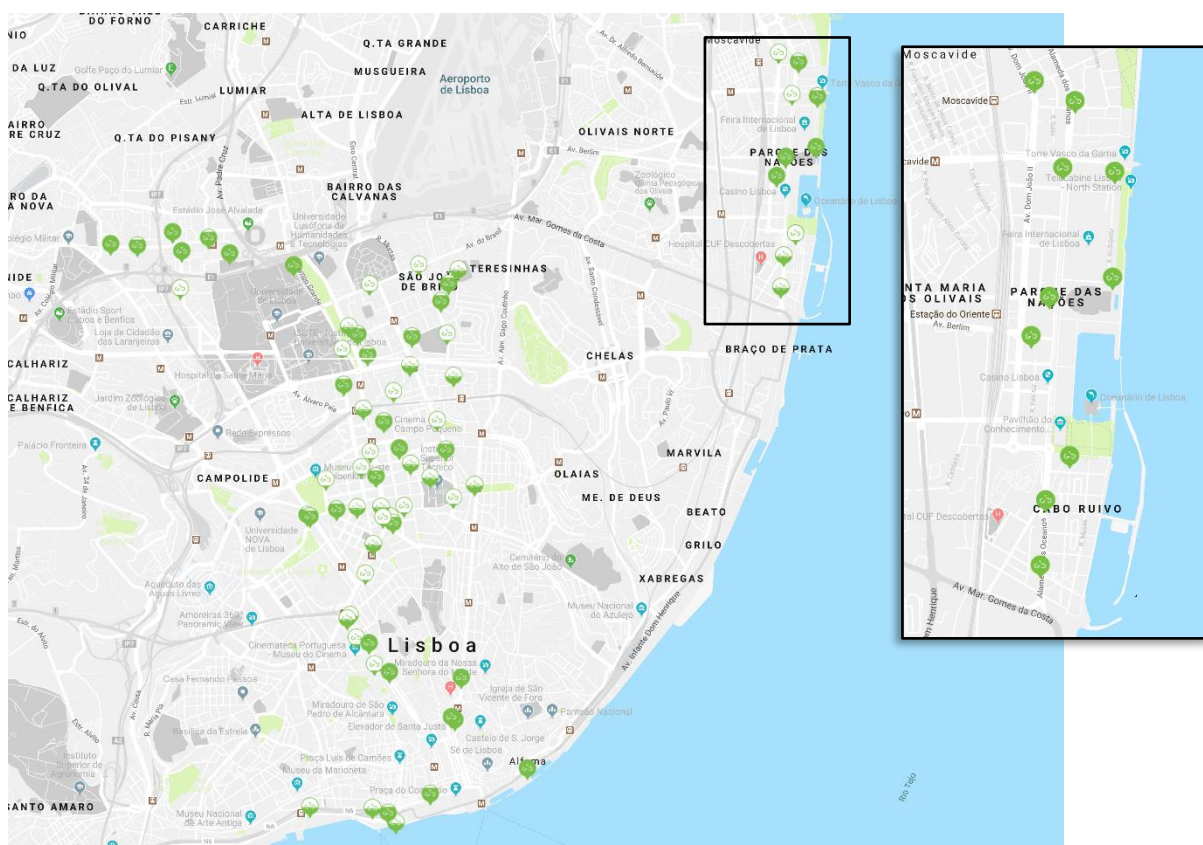


Figura 6 - Mapa da rede GIRA (dezembro de 2018), zona de atuação do trabalho

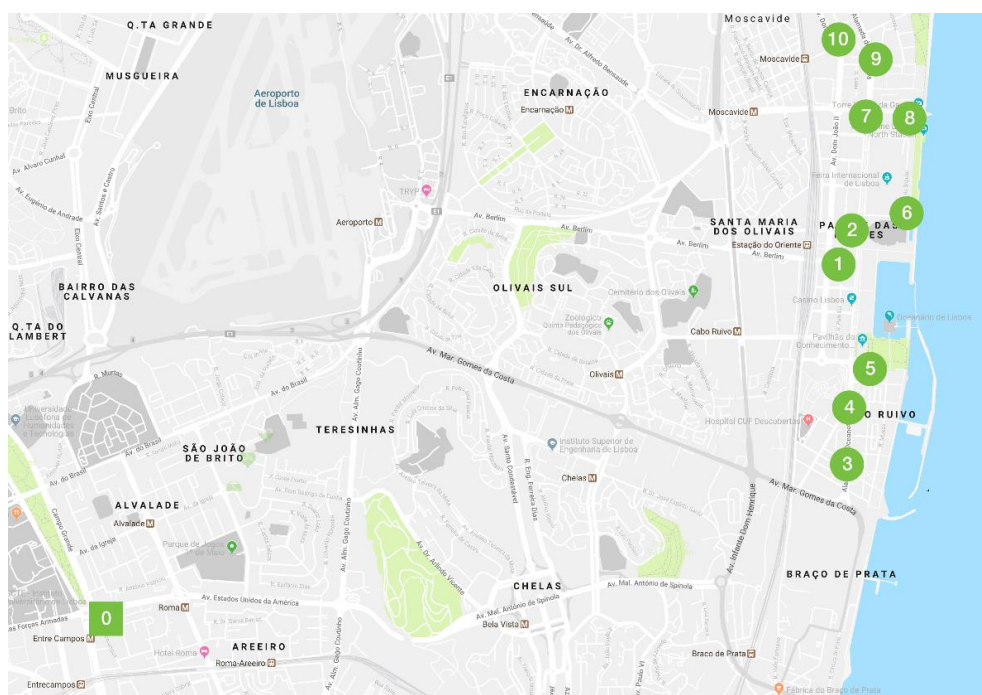


Figura 7 - Mapa zona de atuação, depósito e estações

Anexo 2 – Instâncias

Tabela VI - Instâncias geradas

Intervalo de procuras	Instância	Estação										Soma das procuras	Intervalo soma das procuras
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
[-5; 5]	1	-5	-2	4	3	-1	-5	-5	5	1	3	-2	[-7; 7]
	2	4	-3	3	5	-3	2	1	4	-3	-4	6	
	3	1	4	-5	-1	1	4	4	0	-4	-3	1	
	4	4	-4	5	2	-4	-1	4	-2	1	2	7	
	5	2	5	4	-5	5	5	-3	-2	-5	-3	3	
	6	5	-2	4	-4	-1	3	-1	3	-3	-2	2	
	7	4	0	-4	-4	1	4	-1	0	1	-1	0	
	8	3	4	0	-2	2	-1	-5	3	2	-1	5	
	9	-2	5	5	-4	-3	1	5	-3	-4	0	0	
	10	-4	3	4	-2	-2	-2	4	-1	-4	5	1	
[-5; 5]	11	4	0	4	-5	5	3	-2	0	3	-2	10	[-14; -8] ∪ [8; 14]
	12	-5	-2	2	-1	5	-5	2	-2	-4	-2	-12	
	13	1	-3	4	5	3	5	-2	2	-4	3	14	
	14	2	1	0	-2	-3	5	3	2	3	3	14	
	15	-2	1	-3	-1	-1	1	-4	-1	4	-4	-10	
	16	5	2	2	3	1	-3	-1	4	-1	-1	11	
	17	2	4	3	-4	-2	-3	-4	-1	-4	-3	-12	
	18	3	-2	-1	-1	5	2	-3	1	2	3	9	
	19	2	-2	-1	-1	4	0	-3	1	5	5	10	
	20	2	-5	-5	-5	1	-4	-2	0	2	2	-14	
[-10;10]	21	3	8	8	0	-8	1	1	7	-10	-3	7	[-7; 7]
	22	0	9	-4	-7	3	3	5	0	3	-6	6	
	23	2	-8	-10	-5	7	2	6	-10	7	4	-5	
	24	-6	-4	1	5	-3	7	2	10	-9	-6	-3	
	25	10	-1	-1	-4	7	6	-2	-2	-4	-3	6	
	26	-6	0	4	8	-7	9	-2	-5	-8	1	-6	
	27	5	9	4	-10	-5	5	-7	-8	0	0	-7	
	28	9	-3	-3	-8	3	-3	9	4	-8	-7	-7	
	29	5	5	8	-5	3	0	-6	-4	-4	0	2	
	30	-5	6	-6	-5	-6	10	-9	0	6	10	1	
[-10;10]	31	-3	3	7	-8	0	-8	-8	-3	7	1	-12	[-14; -8] ∪ [8; 14]
	32	2	6	5	-1	-6	6	-6	-9	5	9	11	
	33	-4	-3	9	-9	-5	-5	3	-3	4	2	-11	
	34	0	9	-4	-7	3	3	9	0	3	-8	8	
	35	6	-4	-4	1	-7	9	-4	-10	2	-3	-14	
	36	-1	-1	4	4	2	-1	-9	2	1	8	9	
	37	-8	6	2	-8	0	9	4	7	-10	6	8	
	38	-6	3	9	5	-3	-8	-8	5	-6	1	-8	
	39	6	-9	-5	1	8	2	-4	-3	10	4	10	
	40	-4	1	8	10	-5	-6	-6	-5	-1	-5	-13	

Anexo 3 – Resultados

Tabela VII - Desvios dos resultados

Instância	Grupo	Formulação		Desvio Heurística 1		Desvio Heurística 2	
		Tempo (s)	Solução	Tempo	Solução	Tempo	Solução
1	1	3.49	13.187	-0.991	0.054	-0.991	0.618
2	1	2.68	13.187	-0.993	0.000	-0.978	0.490
3	1	3.36	13.187	-0.994	0.119	-0.991	0.550
4	1	2.54	13.187	-0.992	0.000	-0.992	0.591
5	1	3.25	13.356	-0.994	0.143	-0.991	0.477
6	1	1.55	13.187	-0.987	0.083	-0.987	0.398
7	1	4.03	13.187	-0.995	0.084	-0.995	0.558
8	1	5.52	13.187	-0.996	0.034	-0.996	0.470
9	1	5.07	13.187	-0.994	0.112	-0.996	0.773
10	1	1.08	13.187	-0.981	0.041	-0.981	0.397
11	2	1.3	13.187	-0.985	0.034	-0.985	0.229
12	2	4.84	14.367	-0.996	0.124	-0.996	0.264
13	2	2.37	13.528	-0.992	0.028	-0.992	0.691
14	2	5.23	15.342	-0.992	0.080	-0.994	0.210
15	2	2.1	13.187	-0.990	0.000	-0.990	0.381
16	2	0.8	13.187	-0.963	0.000	-0.975	0.299
17	2	1.73	13.986	-0.988	0.042	-0.983	0.580
18	2	1.97	13.187	-0.990	0.063	-0.985	0.347
19	2	2.2	13.187	-0.991	0.063	-0.991	0.502
20	2	4.54	13.527	-0.993	0.028	-0.996	0.239
21	3	4.03	13.356	-0.995	0.024	-0.995	0.236
22	3	2.45	13.844	-0.992	0.188	-0.992	0.483
23	3	2.13	14.101	-0.991	0.065	-0.991	0.426
24	3	2.19	13.806	-	-	-0.986	0.398
25	3	2.5	13.356	-0.992	0.104	-0.992	0.540
26	3	1.72	13.758	-0.988	0.007	-0.988	0.359
27	3	3.98	14.241	-0.995	0.079	-0.995	0.294
28	3	3.29	13.572	-	-	-0.991	0.369
29	3	9.24	13.527	-0.998	0.127	-0.997	0.523
30	3	3.7	15.295	-0.995	0.150	-0.992	0.411
31	4	2.42	13.631	-0.992	0.042	-0.988	0.293
32	4	1.7	13.489	-0.988	0.204	-0.988	0.453
33	4	3.09	13.679	-0.994	0.049	-0.994	0.338
34	4	15.96	14.965	-0.997	0.172	-0.999	0.480
35	4	4.35	13.933	-0.995	0.033	-0.993	0.635
36	4	4.16	13.187	-0.995	0.000	-0.995	0.751
37	4	1.39	13.970	-0.986	0.237	-0.986	0.457
38	4	3.31	15.015	-0.994	0.181	-0.994	0.351
39	4	0.64	13.509	-0.969	0.051	-0.953	0.302
40	4	4.71	16.355	-0.994	0.261	-0.994	0.399
Média				-0.991	0.082	-0.990	0.439

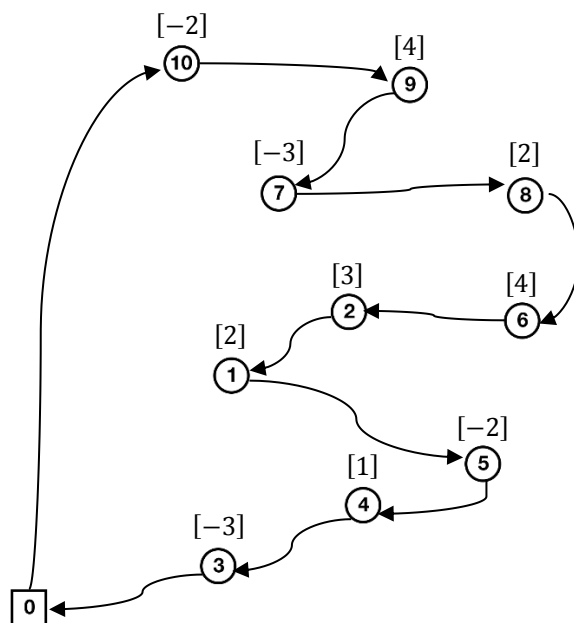


Figura 8 - Solução gerada pela formulação

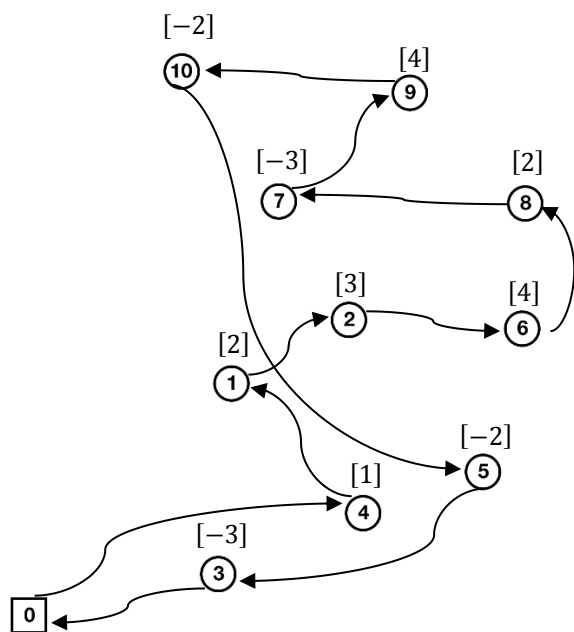


Figura 9 - Solução gerada pela heurística 1

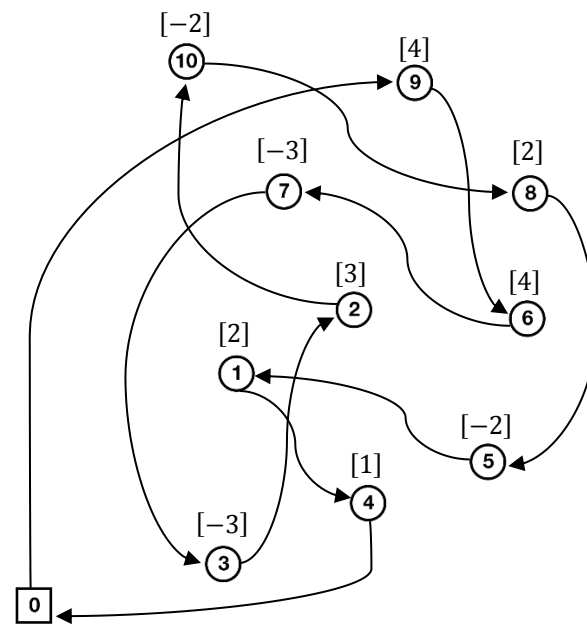


Figura 10 - Solução gerada pela heurística 2